

Pembahasan Soal **SBMPTN 2014**

SELEKSI BERSAMA MASUK PERGURUAN TINGGI NEGERI

Disertai TRIK SUPERKILAT dan LOGIKA PRAKTIS



Matematika IPA

(MATEMATIKA TKD SAINTEK)

Disusun Oleh :

Pak Anang

(<http://pak-anang.blogspot.com>)

Kumpulan SMART SOLUTION dan TRIK SUPERKILAT

Pembahasan Soal SBMPTN 2014 TKD SAINTEK

Matematika IPA Kode Soal 512

By Pak Anang (<http://pak-anang.blogspot.com>)

1. Agar $1, a^2$, dan $-2a^2\sqrt{2}$ masing-masing merupakan suku ke 3, suku ke 5, dan suku ke 8 suatu barisan geometri, maka rasio barisan tersebut adalah

- A. -2
~~B. $-\sqrt{2}$~~
 C. 2
 D. $2\sqrt{2}$
 E. 4

TRIK SUPERKILAT:

Kita tahu bahwa $U_3 = 1, U_5 = a^2, U_8 = -2a^2\sqrt{2}$

Perhatikan bahwa pada suku ganjil nilainya positif sementara pada suku genap nilainya negatif.

Ini adalah salah satu tanda bahwa terjadi perubahan tanda positif-negatif yang berselang-seling. Sangat jelas bahwa rasio barisan geometri tersebut pastilah bernilai negatif.

Jadi hanya jawaban A dan B sajalah yang mungkin benar.

Perhatikan U_5 ke U_8 lompat tiga kali rasio, jadi $r^3 = -2\sqrt{2}$. Jadi jelas bahwa $r = -\sqrt{2}$.

Jawaban B benar!

Pembahasan:

Perhatikan bahwa tantangan soal disini adalah bagaimana mengeliminasi a^2 , sehingga dengan mudah diperoleh rasio barisan geometri tersebut.

Oh iya, hati-hati, disini variabel a tidak melambangkan suku pertama. Oleh karena itu, untuk menghindari kesalahpahaman maka suku pertama pada rumus umum suku ke- n barisan geometri kita ganti menjadi huruf 'a' besar sebagai berikut:

$$U_n = Ar^{n-1}$$

Perhatikan juga bahwa pada suku ke 5 dan suku ke 8 memuat masing-masing bentuk a^2 yang tentunya bisa dieliminasi dengan sebuah perbandingan berikut:

$$\begin{aligned} \frac{U_8}{U_5} &= \frac{-2a^2\sqrt{2}}{a^2} \Rightarrow \frac{\cancel{A}r^7}{\cancel{A}r^4} = \frac{-2\cancel{a^2}\sqrt{2}}{\cancel{a^2}} \\ &\Leftrightarrow r^3 = -2\sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow r^3 = (-\sqrt{2})^3 \\ &\Leftrightarrow r^3 = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

Jadi, rasio barisan tersebut adalah $-\sqrt{2}$.

Dimana seandainya ditanyakan nilai a , maka dengan mudah nilai a bisa ditemukan dari perbandingan berikut:

$$\begin{aligned} \frac{U_5}{U_3} &= \frac{a^2}{1} \Rightarrow \frac{\cancel{A}r^4}{\cancel{A}r^2} = \frac{a^2}{1} \\ &\Leftrightarrow r^2 = a^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 = (-\sqrt{2})^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 = 2 \\ &\Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

2. Vektor-vektor $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, dan $\mathbf{w}$ tak nol dan $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$. Jika $|\mathbf{v} - \mathbf{w}| = |\mathbf{u} - \mathbf{w}|$, maka....

- A. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{w}|$
- B. $\mathbf{w} = \frac{2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}}{5}$
- C. $|\mathbf{u} - \mathbf{w}| = |\mathbf{v}|$
- ☒ D. $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ tegak lurus $\mathbf{w}$
- E. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ tegak lurus $\mathbf{w}$

Pembahasan:

Perhatikan syarat yang diberikan pada soal, $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$. Artinya hanya panjang vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ sama, tetapi arahnya belum tentu sama lho ya!.

Sekarang, ingat lagi konsep penjumlahan dan pengurangan vektor, yaitu:

$$|\mathbf{a} \pm \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 \pm 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

Ingat juga konsep sudut antara dua vektor, yaitu:

$$\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$$

Sehingga dengan menggabungkan kedua konsep tersebut diperoleh:

$$|\mathbf{a} \pm \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 \pm 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \Rightarrow |\mathbf{a} \pm \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 \pm 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

Nah, sekarang perhatikan operasi pengurangan vektor yang diberikan soal, sehingga akan diperoleh:

$$\begin{aligned} & |\mathbf{v} - \mathbf{w}| = |\mathbf{u} - \mathbf{w}| \text{ (kedua ruas dikuadratkan)} \\ \Leftrightarrow & |\mathbf{v} - \mathbf{w}|^2 = |\mathbf{u} - \mathbf{w}|^2 \\ \Leftrightarrow & |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{w}|^2 - 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{w}|^2 - 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \text{ (ingat bahwa } |\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| \Rightarrow |\mathbf{u}|^2 = |\mathbf{v}|^2) \\ \Leftrightarrow & \cancel{|\mathbf{u}|^2} + |\mathbf{w}|^2 - 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \cancel{|\mathbf{u}|^2} + \cancel{|\mathbf{w}|^2} - 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \text{ (kedua ruas dikurangi } |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{w}|^2) \\ \Leftrightarrow & \cancel{-2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \cancel{-2}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \text{ (kedua ruas dibagi } (-2)) \\ \Leftrightarrow & (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \text{ (kedua ruas dikurangi } (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})) \\ \Leftrightarrow & 0 = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \\ \Leftrightarrow & 0 = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \end{aligned}$$

Sehingga dari $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = 0$, dapat disimpulkan bahwa $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ tegak lurus $\mathbf{w}$.

3. Banyaknya akar real $f(t) = t^9 - t$ adalah

- A. 2
- ☒ B. 3
- C. 4
- D. 6
- E. 9

TRIK SUPERKILAT:

Kita tahu bahwa akar real $f(t)$ bisa didapatkan dengan mencari penyelesaian dari $t^9 - t = 0$ atau $t^9 = t$. Dengan perhitungan sederhana kita akan mendapatkan akar-akarnya adalah 0, -1, dan 1.

Pembahasan:

Perhatikan $f(t) = t^9 - t$.

Mencari banyaknya akar real dari $f(t)$, berarti sama halnya dengan mencari nilai t yang menyebabkan $f(t) = 0$. Banyak akar real tersebut bisa ditentukan dengan mencari berapa jumlah faktor linear dari $f(t)$ dengan cara memfaktorkannya terlebih dahulu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(t) = 0 &\Rightarrow & t^9 - t &= 0 \\ &\Leftrightarrow & t(t^8 - 1) &= 0 \text{ (ingat } t^8 - 1 = (t^4 + 1)(t^4 - 1)) \\ &\Leftrightarrow & t(t^4 + 1)(t^4 - 1) &= 0 \text{ (ingat } t^4 - 1 = (t^2 + 1)(t^2 - 1)) \\ &\Leftrightarrow & t(t^4 + 1)(t^2 + 1)(t^2 - 1) &= 0 \text{ (ingat } t^2 - 1 = (t + 1)(t - 1)) \\ &\Leftrightarrow & t(t^4 + 1)(t^2 + 1)(t + 1)(t - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga ada 3 buah faktor linear yaitu t , $(t + 1)$, dan $(t - 1)$.

Jadi, ada 3 buah akar-akar penyelesaian suku banyak yaitu 0, -1, dan 1.

4. Jika $\mathbf{A}$ adalah matriks berukuran 2×2 dan

$$\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = x^2 - 5x + 8$$

Maka matriks $\mathbf{A}$ yang mungkin adalah

A. $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$

~~D. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -8 & 8 \end{bmatrix}$~~

E. $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$

Pembahasan:

Perhatikan pada soal diberikan $\mathbf{A}$ adalah matriks berukuran 2×2 .

Kita misalkan $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, sehingga:

$$\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = x^2 - 5x + 8$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = x^2 - 5x + 8$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} ax + c & bx + d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = x^2 - 5x + 8$$

$$\Leftrightarrow (ax + c)x + (bx + d) = x^2 - 5x + 8$$

$$\Leftrightarrow ax^2 + (b + c)x + d = x^2 - 5x + 8$$

Sehingga, dengan menggunakan kesamaan suku banyak, diperoleh:

- $ax^2 = x^2 \Rightarrow a = 1$
- $(b + c)x = -5x \Rightarrow b + c = -5$
- $d = 8$

Jadi, matriks $\mathbf{A}$ adalah:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ c & 8 \end{bmatrix}, \text{ dimana } b + c = -5$$

Dengan memperhatikan pilihan jawaban tersedia yang mungkin benar, maka jawaban yang paling tepat adalah pilihan jawaban D, yaitu:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -8 & 8 \end{bmatrix}, \text{ dimana } b = 3 \text{ dan } c = -8, \text{ sehingga } 3 + (-8) = -5$$

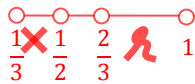
5. Penyelesaian pertidaksamaan

$(1-|x|) \log(3x-1) < 1$ adalah

- A. $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$
 B. $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$
 C. $\frac{1}{3} < x < 1$
 D. $\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}$
~~E. $\frac{1}{2} < x < 1$~~

TRIK SUPERKILAT:

Kita tahu bahwa kita bisa mencoba mensubstitusikan pilihan jawaban ke soal dengan sistem trial and error sebagai berikut:



Ada 3 interval yang perlu dicek. $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}$ dan $\frac{2}{3} < x < 1$

Saya pilih daerah paling kiri yaitu $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{➤ } \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2} \text{ ada } 0,4 \text{ disitu! } & \quad {}^{0,6} \log 0,2 < {}^{0,6} \log 0,6 \\ & \Rightarrow 0,2 > 0,6 \text{ (SALAH)} \end{aligned}$$

Jelas bahwa A, B, C salah!!!!!! Sekarang perhatikan tinggal D atau E.

Perhatikan pembedanya adalah daerah $\frac{2}{3} < x < 1$, mari kita cek!

$$\begin{aligned} \text{➤ } \frac{2}{3} < x < 1 \text{ ada } 0,9 \text{ disitu! } & \quad {}^{0,9} \log 1,7 < {}^{0,9} \log 0,9 \\ & \Rightarrow 1,7 > 0,9 \text{ (BENAR)} \end{aligned}$$

Pembahasan:

Sudahlah pasti jawabannya E.
 Sederhana kan? ☺

Perhatikan, ketika kita berhadapan dengan fungsi logaritma, maka ada dua syarat mendasar yang harus diperiksa terlebih dahulu:

- **Syarat numerus:** numerus logaritma harus positif.

$$\begin{aligned} 3x - 1 &> 0 \\ \Leftrightarrow 3x &> 1 \\ \Leftrightarrow x &> \frac{1}{3} \dots\dots\dots(1) \end{aligned}$$

- **Syarat basis:** basis logaritma harus positif dan tidak boleh sama dengan 1.

$$\begin{aligned} 1 - |x| &> 0 & \text{ dan } & 1 - |x| \neq 1 \\ \Leftrightarrow -|x| &> -1 & \Leftrightarrow & -|x| \neq 0 \\ \Leftrightarrow |x| &< 1 & \Leftrightarrow & |x| \neq 0 \dots\dots\dots(3) \\ \Leftrightarrow -1 &< x < 1 \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

Perhatikan (2) dan (3) akan menyebabkan $-1 < x < 0$ dan $0 < x < 1$, sehingga:

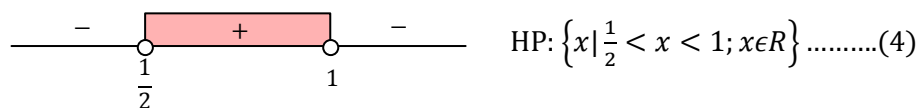
$$\begin{aligned} -1 < x < 0 \text{ dan } 0 < x < 1 &\Rightarrow 0 < |x| < 1 \text{ (kedua ruas dikalikan } -1) \\ &\Leftrightarrow -1 < -|x| < 0 \text{ (kedua ruas ditambah 1)} \\ &\Leftrightarrow 0 < 1 - |x| < 1 \end{aligned}$$

Hal tersebut berarti basis logaritma adalah $0 < 1 - |x| < 1$.

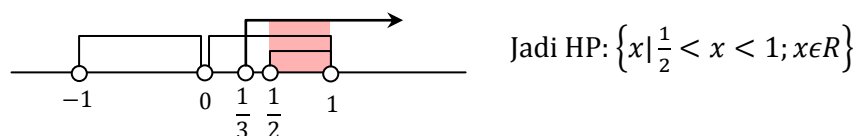
Sedangkan, penyelesaian dari pertidaksamaan logaritma $(1-|x|) \log(3x-1) < 1$ adalah:

$$\begin{aligned} & \quad (1-|x|) \log(3x-1) < 1 \\ \Leftrightarrow & \quad (1-|x|) \log(3x-1) < (1-|x|) \log(1-|x|) \\ & \quad \text{(ingat untuk basis } 0 < a < 1, \text{ maka } {}^a \log f(x) < {}^a \log g(x) \Rightarrow f(x) > g(x)) \\ \Leftrightarrow & \quad 3x - 1 > 1 - |x| \\ \Leftrightarrow & \quad 3x - 2 > -|x| \\ \Leftrightarrow & \quad |x| > -3x + 2 \\ & \quad \text{(ingat } |f(x)| > g(x) \Rightarrow (f(x) + g(x))(f(x) - g(x)) > 0) \\ \Leftrightarrow & \quad (x + (-3x + 2))(x - (-3x + 2)) > 0 \\ \Leftrightarrow & \quad (-2x + 2)(4x + 2) > 0 \\ & \quad \text{Pembuat nol} \\ \Leftrightarrow & \quad (-2x + 2) = 0 \text{ atau } (4x + 2) = 0 \\ \Leftrightarrow & \quad x = 1 \quad \text{ atau } \quad x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Penyelesaiannya dapat dilihat pada garis bilangan berikut:



Jadi, penyelesaian akhirnya adalah irisan dari daerah (1), (2), (3) dan (4), yaitu:



6. Jika

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(f(x) + \frac{1}{g(x)} \right) = 4 \text{ dan}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(f(x) - \frac{1}{g(x)} \right) = -3 \text{ maka}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left((f(x))^2 + \left(\frac{1}{g(x)} \right)^2 \right) = \dots$$

A. $\frac{24}{3}$

B. $\frac{23}{5}$

C. $\frac{25}{3}$

☒ D. $\frac{25}{2}$

E. $\frac{27}{2}$

TRIK SUPERKILAT:

Kita tahu bahwa,

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(f(x) + \frac{1}{g(x)} \right) = 4 \Rightarrow f(a) + \frac{1}{g(a)} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(f(x) - \frac{1}{g(x)} \right) = -3 \Rightarrow f(a) - \frac{1}{g(a)} = -3$$

Kita misalkan saja,

$$f(a) = p \text{ dan } \frac{1}{g(a)} = q, \text{ sehingga:}$$

$$p + q = 4$$

$$p - q = -3$$

$$\frac{p + q}{p - q} = \frac{4}{-3} \Rightarrow \frac{p + q}{p - q} = -\frac{4}{3}$$

$$\text{Sehingga, } \frac{1}{2} + q = 4 \Rightarrow q = \frac{7}{2}$$

Jadi,

$$\lim_{x \rightarrow a} \left((f(x))^2 + \left(\frac{1}{g(x)} \right)^2 \right) = p^2 + q^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{7}{2} \right)^2 = \frac{50}{4} = \frac{25}{2}$$

Pembahasan:

Perhatikan,

$$\lim_{x \rightarrow a} \left((f(x))^2 + \left(\frac{1}{g(x)} \right)^2 \right) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x))^2 + \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g(x)} \right)^2$$

Bentuk seperti itu akan kita peroleh apabila kita mengkuadratkan kedua limit yang diberikan pada soal, sehingga:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(f(x) + \frac{1}{g(x)} \right) = 4 \Rightarrow \left(\lim_{x \rightarrow a} \left(f(x) + \frac{1}{g(x)} \right) \right)^2 = (4)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\lim_{x \rightarrow a} (f(x)) + \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g(x)} \right) \right)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x))^2 + 2 \cdot \lim_{x \rightarrow a} (f(x)) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g(x)} \right) + \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g(x)} \right)^2 = 16$$

dan,

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(f(x) - \frac{1}{g(x)} \right) = -3 \Rightarrow \left(\lim_{x \rightarrow a} \left(f(x) - \frac{1}{g(x)} \right) \right)^2 = (-3)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\lim_{x \rightarrow a} (f(x)) - \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g(x)} \right) \right)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x))^2 - 2 \cdot \lim_{x \rightarrow a} (f(x)) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g(x)} \right) + \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g(x)} \right)^2 = 9$$

Sehingga, dengan menjumlahkan kedua bentuk di atas akan diperoleh:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^2 + \cancel{2 \cdot \lim_{x \rightarrow a} (f(x)) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g(x)} \right)} + \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g(x)} \right)^2 = 16$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^2 - \cancel{2 \cdot \lim_{x \rightarrow a} (f(x)) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g(x)} \right)} + \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g(x)} \right)^2 = 9$$

$$\frac{\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^2 + \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g(x)} \right)^2 + \lim_{x \rightarrow a} (f(x))^2 + \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g(x)} \right)^2}{2} = \frac{16 + 9}{2} = \frac{25}{2} \text{ (kedua ruas dibagi 2)}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x))^2 + \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g(x)} \right)^2 = \frac{25}{2}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \left((f(x))^2 + \left(\frac{1}{g(x)} \right)^2 \right) = \frac{25}{2}$$

7. Nilai a yang menyebabkan persamaan

$$9^x - a \cdot 3^x + a = 0$$

mempunyai tepat satu akar nyata adalah

- ☒ A. 4
B. 0 atau 4
C. $a < 0$
D. $a < 0$ atau 4
E. $a < 0$ atau $a > 4$

TRIK SUPERKILAT:

Kita tahu bahwa sebuah persamaan kuadrat akan menghasilkan satu akar nyata, apabila $D = 0$.
Jelas bahwa penyelesaiannya adalah bukan daerah interval yang ciri khasnya adalah ditandai dengan tanda pertidaksamaan. Jelas jawaban C, D, E salah!
Tinggal cek saja bagaimana jawaban A dan B.
Jelas bahwa apabila $a = 0$ menyebabkan $9^x = 0$. Ini jelas mustahil, bilangan 9 dipangkatkan berapapun tidak mungkin nol.
Jadi jawabannya A.

Pembahasan:

Perhatikan,

$$\begin{aligned} 9^x - a \cdot 3^x + a = 0 &\Rightarrow (3^2)^x - a \cdot 3^x + a = 0 \\ &\Leftrightarrow (3^x)^2 - a \cdot 3^x + a = 0 \end{aligned}$$

Bentuk persamaan di atas serupa dengan bentuk persamaan kuadrat asalkan kita mau memisalkan bentuk 3^x dulu supaya menjadi lebih sederhana.

Misal $3^x = p$ maka persamaan diatas menjadi,

$$(3^x)^2 - a \cdot 3^x + a = 0 \Rightarrow p^2 - ap + a = 0$$

Nah, bentuk $p^2 - ap + a = 0$ akan tepat memiliki satu akar nyata apabila nilai diskriminan persamaan kuadrat tersebut adalah nol.

Pada persamaan kuadrat $p^2 - ap + a = 0$, diperoleh nilai $A = 1$; $B = -a$; $C = a$

$$\begin{aligned} D = 0 &\Rightarrow B^2 - 4AC = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 - 4a = 0 \\ &\Leftrightarrow a(a - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 0 \text{ atau } a - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 0 \text{ atau } a = 4 \end{aligned}$$

Perhatikan, $3^x > 0$, maka apabila $a = 0$ menyebabkan $(3^x)^2 = 0$.

Jelas bahwa $a = 0$ bertentangan dengan syarat $3^x > 0$.

Jadi, jawaban yang memenuhi hanya $a = 4$ saja.

8. Jika $f(x) = 1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \dots$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, maka $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \dots$

A. $-\sqrt{2}$

B. -1

C. 0

D. 1

~~E. $\sqrt{2}$~~

TRIK SUPERKILAT:

Kita tahu bahwa:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \dots) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x dx + \dots$$

Kita coba saja beberapa suku dari deret tersebut,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dx = \frac{\pi}{4} \approx 0,8;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x dx = \dots = \text{pasti bernilai positif!}$$

Kita tahu bahwa integral adalah representasi dari luas daerah. Dan untuk grafik sinus pada $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ selalu diatas sumbu X kan????? Jadi luasnya pasti positif..... Jadi yang jelas nilainya positif.

Tinggal D dan E yang mungkin benar. Dan pasti nilainya lebih dari 1. Pasti E yang benar!

Pembahasan:

Perhatikan,

$$f(x) = 1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \dots$$

Karena, $|\sin x| < 1$, maka fungsi di atas merupakan bentuk deret geometri tak hingga dengan:

$$U_1 = a = 1$$

$$r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\sin x}{1} = \sin x$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} f(x) = S_{\infty} &= \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\sin x} \\ &= \frac{1}{1-\sin x} \cdot \frac{1+\sin x}{1+\sin x} \\ &= \frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x} \\ &= \frac{1+\sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos x} \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \sec^2 x + \sec x \tan x \end{aligned}$$

Sehingga,

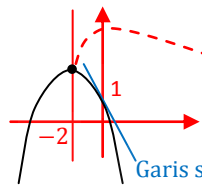
$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x + \sec x \tan x) dx = [\tan x + \sec x]_0^{\pi/4} \\ &= \left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sec\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) - (\tan 0 + \sec 0) \\ &= (1 + \sqrt{2}) - (0 + 1) \\ &= \cancel{1} + \sqrt{2} - \cancel{1} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

9. Diketahui suatu parabola simetris terhadap garis $x = -2$, dan garis singgung parabola tersebut di titik $(0, 1)$ sejajar garis $4x + y = 4$. Titik puncak parabola tersebut adalah

- A. $(-2, -3)$
 B. $(-2, -2)$
 C. $(-2, 0)$
 D. $(-2, 1)$
~~E. $(-2, 5)$~~

TRIK SUPERKILAT:

Kita tahu bahwa sumbu simetri parabola $x = -2$, dan parabola melewati $(0, 1)$. Kemungkinan grafik menghadap atas atau bawah. Masih belum jelas. Perhatikan gradien garis singgung di titik $(0, 1)$ nilainya negatif. Artinya garis singgung di titik tersebut miring ke kiri. Mari kita sketsa grafiknya!



Jadi, titik ini pasti berada di atas titik $(-2, 1)$.
 Dan satu-satunya jawaban yang tersedia pada soal yang benar hanyalah E...
 Ya udah selesai!!!! ☺

Pembahasan:

Perhatikan, dalam soal persamaan parabola (fungsi kuadrat) belum diketahui.

Unsur-unsur parabola (fungsi kuadrat) yang diketahui antara lain:

- Sumbu simetri parabola adalah $x = -2$
- Parabola melalui titik $(0, 1)$
- Garis singgung parabola di titik $(0, 1)$ sejajar garis $4x + y = 4$

Pertama, mari kita misalkan fungsi kuadratnya adalah: $y = ax^2 + bx + c$

Dalam hal ini kita akan mencari nilai a, b, c yang menjadi ciri khas persamaan fungsi kuadrat yang diketahui pada soal.

Pertama, parabola melewati titik $(0, 1)$ artinya jika $x = 0$ maka $y = 1$

Sehingga,

$$x = 0; y = 1 \Rightarrow 1 = a(0)^2 + b(0) + c$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{c = 1}$$

Kedua, perhatikan garis singgung parabola di titik $(0, 1)$ sejajar garis $4x + y = 4$.

Artinya gradien garis singgung parabola di $x = 0$ nilainya sama dengan gradien dari garis $4x + y = 4$. Mari kita periksa kedua gradien tersebut:

- Gradien dari garis $4x + y = 4$ adalah $m_g = -4$.
- Padahal gradien dari parabola adalah $m_p = y' \Rightarrow m_p = 2ax + b$
 Sehingga gradien dari parabola di titik $(0, 1)$ adalah untuk $x = 0 \Rightarrow m_p = 2a(0) + b$
 $\Leftrightarrow m_p = b$

Sehingga,

$$m_p = m_g \Rightarrow \mathbf{b = -4}$$

Ketiga, sumbu simetri dari parabola tersebut adalah $x = -\frac{b}{2a}$, padahal kita sudah tahu nilai $x = -2$ dan $b = -4$.

Sehingga,

$$x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow -2 = -\frac{(-4)}{2a}$$

$$\Leftrightarrow -4a = 4$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{a = -1}$$

Jadi, persamaan parabola (fungsi kuadrat) tersebut adalah $y = -x^2 - 4x + 1$

Nilai puncak dari parabola tersebut tercapai pada titik simetrinya, artinya titik puncak parabola adalah nilai fungsi saat $x = -2$

Sehingga,

$$y_{puncak} = -(-2)^2 - 4(-2) + 1 = -4 + 8 + 1 = 5$$

Jadi, titik puncak dari parabola tersebut adalah $(-2, 5)$.

10. Jika lingkaran $x^2 + y^2 - 2ax + b = 0$ mempunyai jari-jari 2 dan menyinggung $x - y = 0$, maka nilai $a^2 + b$ adalah

- ~~A.~~ 12
B. 8
C. 4
D. 2
E. 0

TRIK SUPERKILAT:

Perhatikan ilustrasi di samping!

Kita tahu apabila lingkaran menyinggung garis, maka jari-jari lingkaran adalah jarak pusat lingkaran ke garis tersebut.

Ingat rumus jarak titik (x_1, y_1) ke garis $ax + by + c = 0$ adalah $r = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$

Sehingga $2 = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$

Ingat rumus jari-jari apabila diketahui pusat (a, b) dan C adalah $r = \sqrt{a^2 + b^2 - C}$

$2 = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 0^2 - b} \Rightarrow b = 4$

Jadi, $a^2 + b = (2\sqrt{2})^2 + 4 = 8 + 4 = 12$

Sangat praktis kan? ☺



Pembahasan:

Perhatikan, dengan melihat bentuk umum lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ maka pada lingkaran $x^2 + y^2 - 2ax + b = 0$ diperoleh $A = -2a; B = 0; C = b$.

Unsur-unsur lingkaran yang diketahui adalah jari-jari lingkaran 2, sehingga $r = 2$.

Perhatikan juga hubungan antara A, B, C , dan r pada bentuk umum lingkaran adalah:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C} \Rightarrow r^2 = \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C \\ &\Leftrightarrow (2)^2 = \frac{1}{4}(-2a)^2 + \frac{1}{4}(0)^2 - b \\ &\Leftrightarrow 4 = \frac{4a^2}{4} + 0 - b \\ &\Leftrightarrow 4 = a^2 - b \\ &\Leftrightarrow a^2 = b + 4 \dots\dots\dots(1) \end{aligned}$$

Pada soal diketahui juga bahwa lingkaran $x^2 + y^2 - 2ax + b = 0$ menyinggung garis $x - y = 0$.

Perhatikan $x - y = 0 \Rightarrow y = x$

Substitusikan $y = x$ ke lingkaran $x^2 + y^2 - 2ax + b = 0$, diperoleh:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2ax + b &= 0 \Rightarrow x^2 + x^2 - 2ax + b = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 2ax + b = 0 \end{aligned}$$

Dari persamaan kuadrat $2x^2 - 2ax + b = 0$ diperoleh $A = 2; B = -2a; C = b$.

Ingat lingkaran menyinggung garis maka diskriminan persamaan kuadrat tersebut sama dengan nol, diperoleh:

$$\begin{aligned} D = 0 &\Rightarrow B^2 - 4AC = 0 \\ &\Leftrightarrow (-2a)^2 - 4(2)(b) = 0 \\ &\Leftrightarrow 4a^2 - 8b = 0 \text{ (kedua ruas dibagi 4)} \\ &\Leftrightarrow a^2 - 2b = 0 \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

Substitusikan persamaan (1) ke persamaan (2), diperoleh:

$$\begin{aligned} a^2 - 2b &= 0 \Rightarrow (b + 4) - 2b = 0 \\ &\Leftrightarrow 4 - b = 0 \\ &\Leftrightarrow b = 4 \end{aligned}$$

Substitusikan $b = 4$ ke persamaan (1), diperoleh:

$$\begin{aligned} a^2 &= b + 4 \Rightarrow a = 4 + 4 \\ &\Leftrightarrow a = 8 \end{aligned}$$

Jadi, $a^2 + b = 8 + 4 = 12$

11. Bila $\sin x + \cos x = a$, maka $\sin^4 x + \cos^4 x = \dots$

A. $1 - (a^2 - 1)^2$

B. $1 - 2(a^2 - 1)^2$

C. $1 + 2(a^2 - 1)^2$

~~D.~~ $1 - \frac{(a^2 - 1)^2}{2}$

E. $1 + \frac{(a^2 - 1)^2}{2}$

TRIK SUPERKILAT:

Kita tahu bahwa $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Sehingga $\sin 45^\circ + \cos 45^\circ = \sqrt{2}$. Jadi $a = \sqrt{2}$

Padahal $\sin^4 45^\circ + \cos^4 45^\circ = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Jelas bahwa jawaban yang benar haruslah kurang dari 1.

Jadi kita perlu mengecek jawaban A, B, D saja.... C dan E sudah pasti salah!

Lihat, $(a^2 - 1)^2 = \left((\sqrt{2})^2 - 1\right)^2 = 1$

Jadi jawabannya D. $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$



Pembahasan:

Perhatikan, dari bentuk $\sin x + \cos x = a$, apabila kita kuadratkan maka akan diperoleh:

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x &= a \text{ (kedua ruas dikuadratkan)} \\ \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^2 &= a^2 \\ \Leftrightarrow \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x &= a^2 \text{ (ingat } \sin^2 x + \cos^2 x = 1) \\ \Leftrightarrow 1 + 2 \sin x \cos x &= a^2 \\ \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x &= a^2 - 1 \\ \Leftrightarrow \sin x \cos x &= \frac{a^2 - 1}{2} \end{aligned}$$

Perhatikan juga bahwa pada soal ditanyakan nilai dari $\sin^4 x + \cos^4 x$ yang dapat diperoleh dari:

$$\begin{aligned} \sin^4 x + \cos^4 x &= (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 \text{ (ingat } a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab) \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \text{ (ingat } \sin^2 x + \cos^2 x = 1) \\ &= 1^2 - 2(\sin x \cos x)^2 \\ &= 1 - 2\left(\frac{a^2 - 1}{2}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{(a^2 - 1)^2}{2} \end{aligned}$$

12. Diberikan kubus $ABCD.EFGH$. Titik P, Q, R , dan S masing-masing pada AB, BC, CD , dan AD sehingga $BP = CR = \frac{AB}{3}$ dan $QC = DS = \frac{AD}{3}$. Volume limas $E.PQRS$ adalah volume kubus.

~~A.~~ $\frac{1}{6}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{2}{3}$

E. $\frac{1}{2}$

TRIK SUPERKILAT:

Perhatikan alas kubus yaitu $ABCD$ dan alas limas yaitu $PQRS$.

Kita tahu bahwa diagonal $PQRS$ yaitu PR dan QS saling tegak lurus.

Kita juga tahu bahwa panjang $PR = QS = AB$.

Sehingga $L_{PQRS} = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 = \frac{1}{2} \cdot PR \cdot QS = \frac{1}{2} AB^2$

Berarti luas alas limas hanya $\frac{1}{2}$ luas alas kubus,

Ingat apabila limas dan kubus memiliki luas alas dan tinggi yang sama maka volume limas adalah $\frac{1}{3}$ volume kubus, sehingga diperoleh:

$$V_{limas} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot V_{kubus} = \frac{1}{6} \cdot V_{kubus}$$

Selesai deh!

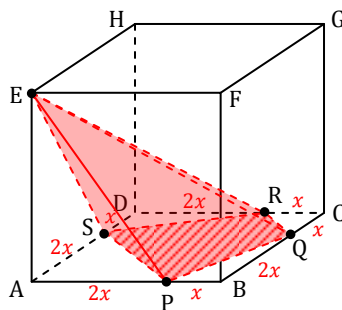


Pembahasan:

Perhatikan kubus $ABCD.EFGH$ berikut!

Misalkan panjang rusuk kubus adalah $3x$, sehingga diperoleh:

- $BP = CR = \frac{AB}{3} = x$
- $QC = DS = \frac{AD}{3} = x$



Dari gambar kubus tersebut, diperoleh dua bangun ruang, yaitu:

- Kubus $ABCD.EFGH$

$$V_{kubus} = (AB)^3$$

$$= (3x)^3$$

$$= 27x^3$$
- Limas $E.PQRS$

$$L_{PQRS} = L_{ABCD} - (L_{PBQ} + L_{QCR} + L_{RDS} + L_{SAP})$$

$$= 9x^2 - \left(x^2 + \frac{1}{2}x^2 + x^2 + 2x^2\right)$$

$$= 9x^2 - \frac{9}{2}x^2$$

$$= \frac{9}{2}x^2$$

$$V_{E.PQRS} = \frac{1}{3} \times L_{PQRS} \times t$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{9}{2}x^2\right) (3x)$$

$$= \frac{9}{2}x^3$$

Jadi perbandingan antara volume limas $E.PQRS$ dengan volume kubus $ABCD.EFGH$ adalah:

$$\frac{V_{E.PQRS}}{V_{kubus}} = \frac{\frac{9}{2}x^3}{27x^3} \Rightarrow V_{E.PQRS} = \frac{\frac{9}{2}x^3}{27x^3} \cdot V_{kubus}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot V_{kubus}$$

13. Diketahui $P(x)$ suatu polinomial. Jika $P(x+1)$ dan $P(x-1)$ masing-masing memberikan sisa 2 apabila masing-masing dibagi $x-1$, maka $P(x)$ dibagi x^2-2x memberikan sisa

TRIK SUPERKILAT:

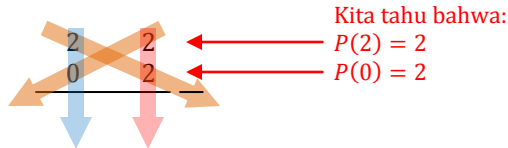
A. $x+2$

B. $2x$

C. x

D. 1

~~E. 2~~



$$(\text{selisih kolom 1}) \text{ sisa} = (\text{selisih kolom 2})x + ((\text{perkalian ke kanan}) - (\text{perkalian ke kiri}))$$

$$2 \cdot \text{sisa} = 0x + (4 - 0)$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \text{sisa} = 4$$

$$\Leftrightarrow \text{sisa} = 2$$

Pembahasan:

Perhatikan, $P(x)$ adalah suatu polinomial (suku banyak).

Menggunakan teorema sisa suku banyak yaitu apabila suku banyak $P(x)$ jika dibagi dengan $(x-h)$ maka sisanya adalah $P(h)$, sehingga diperoleh,

- $\frac{P(x+1)}{x-1}$ sisa 2, maka artinya untuk $x=1$ diperoleh $P(1+1)=2 \Rightarrow P(2)=2$
- $\frac{P(x-1)}{x-1}$ sisa 2, maka artinya untuk $x=1$ diperoleh $P(1-1)=2 \Rightarrow P(0)=2$

Nah, apabila $\frac{P(x)}{x^2-2x}$ maka sisanya adalah $ax+b$

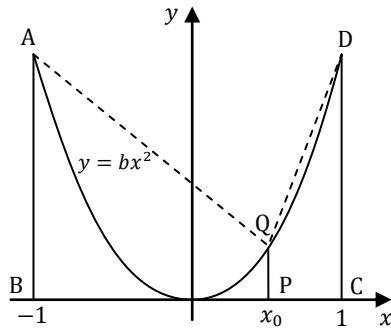
Perhatikan pembagi x^2-2x bisa difaktorkan menjadi $x(x-2)$, sehingga $\frac{P(x)}{x^2-2x} = \frac{P(x)}{x(x-2)}$

$\frac{P(x)}{x(x-2)}$ sisa $ax+b$, maka artinya:

- untuk $x=0$ diperoleh $P(0)=a(0)+b \Rightarrow P(0)=b$
 $\Leftrightarrow 2=b$
- untuk $x=2$ diperoleh $P(2)=a(2)+b \Rightarrow P(2)=2a+b$
 $\Leftrightarrow 2=2a+2$
 $\Leftrightarrow a=0$

Jadi, kesimpulannya $\frac{P(x)}{x^2-2x}$ sisanya adalah 2.

14. Misalkan $A(t)$ menyatakan luas daerah di bawah kurva $y = bx^2$, $0 \leq x \leq t$. Jika titik $P(x_0, 0)$ sehingga $A(x_0):A(1) = 1:8$, maka perbandingan luas trapesium $ABPQ:DCPQ = \dots$



- A. 2 : 1
 B. 3 : 1
 C. 6 : 1
 D. 8 : 1
 E. 9 : 1

Pembahasan:

Perhatikan, $A(t)$ adalah luas daerah di bawah kurva $y = bx^2$, $0 \leq x \leq t$.

$A(t)$ dapat dinyatakan dalam integral tertentu sebagai berikut:

$$A(t) = \int_0^t bx^2 dx$$

Perhatikan, pada soal diketahui bahwa $A(x_0):A(1) = 1:8$, sehingga diperoleh:

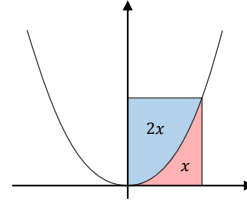
$$\begin{aligned} \frac{A(x_0)}{A(1)} &= \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{\int_0^{x_0} bx^2 dx}{\int_0^1 bx^2 dx} = \frac{1}{8} \\ &\Leftrightarrow \frac{\left[\frac{1}{3}bx^3\right]_0^{x_0}}{\left[\frac{1}{3}bx^3\right]_0^1} = \frac{1}{8} \\ &\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{3}b \cdot x_0^3}{\frac{1}{3}b} = \frac{1}{8} \\ &\Leftrightarrow x_0^3 = \frac{1}{8} \\ &\Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Sehingga, perbandingan luas trapesium $ABPQ:DCPQ$ adalah:

$$\frac{L_{ABPQ}}{L_{DCPQ}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}b + b\right) \cdot \frac{3}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}b + b\right) \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{1}$$

TRIK SUPERKILAT:

Kita tahu bahwa fungsi kuadrat akan membagi persegi panjang menjadi dua daerah dengan perbandingan luas 2 : 1. Luas daerah besar adalah dua kali luas daerah kecil. Perhatikan ilustrasinya pada gambar berikut!



Jadi $A(t)$ adalah $\frac{1}{3}$ kali luas persegi panjang.

$$\left. \begin{aligned} A(x_0) &= \frac{1}{3} \cdot x_0 \cdot bx_0^2 \\ A(1) &= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot b \end{aligned} \right\} \frac{A(x_0)}{A(1)} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{\frac{1}{3} \cdot x_0 \cdot bx_0^2}{\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot b} = \frac{1}{8} \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$$

Perhatikan, bahwa dua trapesium $ABPQ$ dan $DCPQ$ memiliki panjang sisi sejajar yang sama panjang, sehingga perbandingan luas trapesium $ABPQ$ adalah perbandingan tinggi kedua trapesium saja, sehingga diperoleh:

$$\frac{L_{ABPQ}}{L_{DCPQ}} = \frac{PB}{PC} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{1}$$

Selesai deh!



15. Sebuah toko makanan menyediakan es krim dengan 6 rasa berbeda. Banyak cara seseorang pembeli dapat memilih 5 es krim dengan 3 rasa berbeda adalah
- A. 6
 - B. 20
 - C. 22
 - D. 40
 - ~~E. 120~~

Pembahasan:

Perhatikan, dalam memilih 5 es krim dengan 3 rasa berbeda, ada dua kemungkinan:

- Sudah pasti terpilih 3 rasa berbeda, 2 es krim yang lain memiliki rasa yang sama.
 $n(A) = {}_6C_3 \times {}_3C_1 = 20 \times 3 = 60$
- Sudah pasti terpilih 3 rasa berbeda, tapi 2 es krim yang lain rasanya berbeda.
 $n(B) = {}_6C_3 \times {}_3C_2 = 20 \times 3 = 60$

Jadi, total cara seorang pembeli dapat memilih 5 es krim dengan 3 rasa berbeda adalah:

$$n = n(A) + n(B) = 60 + 60 = 120$$

Untuk pembahasan soal-soal SBMPTN dan SNMPTN yang lain silahkan kunjungi <http://pak-anang.blogspot.com>.

Untuk download rangkuman materi, kumpulan SMART SOLUTION dan TRIK SUPERKILAT dalam menghadapi SBMPTN dan SNMPTN serta kumpulan pembahasan soal SBMPTN dan SNMPTN yang lainnya jangan lupa untuk selalu mengunjungi <http://pak-anang.blogspot.com>.

Terimakasih,

Pak Anang.