

- 1 . Jika x_1 dan x_2 merupakan akar-akar persamaan $4x^2 + bx + 4 = 0$, $b \neq 0$, maka $x_1^{-1} + x_2^{-1} = 16(x_1^3 + x_2^3)$ berlaku untuk $b^2 - b$ sama dengan

A . 0 atau 2
B . 6 atau 12
C . 20 atau 30

D . 42 atau 56
E . 72 atau 90

Kunci : D

Penyelesaian :

$$4x^2 + bx + 4 = 0, b \neq 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{4}; x_1 x_2 = \frac{4}{4} = 1$$

$$x_1^{-1} + x_2^{-1} = 16(x_1^3 + x_2^3)$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 16(x_1^3 + x_2^3)$$

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 16(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2)$$

$$\frac{1}{x_1 x_2} = 16\{(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2\}$$

$$1 = 16x_1 x_2 \{(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2\}$$

$$1 = 16.1\left\{\left(-\frac{b}{4}\right)^2 - 3\right\}$$

$$1 = 16.1\left(\frac{b^2}{16} - 3\right)$$

$$1 = b^2 - 48$$

$$b^2 = 49$$

$$b = 7 \text{ atau } -7$$

$$\text{Untuk } b = -7, b^2 - b = (-7)^2 - (-7) = 49 + 7 = 56$$

$$\text{Untuk } b = 7, b^2 - b = (7)^2 - (7) = 49 - 7 = 42$$

$$\text{Jadi } b^2 - b = 42 \text{ atau } b^2 - b = 56$$

- 2 . Jumlah tak hingga suatu deret geometri adalah $\frac{8}{3}$, dan jumlah semua suku pada kedudukan (urutan) genap adalah 3 . Suku kelima deret tersebut adalah

A . 2

B . 1

C . $\frac{1}{2}$

D . $\frac{1}{3}$

E . $\frac{1}{4}$

Kunci : E

Penyelesaian :

Misalkan deret geometri itu : $a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots = 8 \dots\dots (1)$$

$$ar + ar^3 + ar^5 + \dots = \frac{8}{3} \dots\dots (2)$$

$$a + ar^2 + ar^4 + \dots = \frac{16}{3} \dots\dots (3)$$

$$\text{Persamaan (1)} : \frac{a}{1-r} = 8 \dots\dots (4)$$

$$\text{Persamaan (3)} : \frac{a}{1-r^2} = \frac{16}{3} \dots\dots (4)$$

Bagilah persamaan (4) dengan persamaan (5), diperoleh :

$$\frac{\frac{a}{1-r}}{\frac{a}{1-r^2}} = \frac{8}{\frac{16}{3}} \Rightarrow 1+r = \frac{3}{2} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$\text{Dari persamaan (4)} : a = 8(1-r)$$

$$a = 8\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$a = 4$$

$$\text{Suku ke-5} : U_5 = ar^4$$

$$U_5 = 4\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$U_5 = \frac{1}{4}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} (3x - 2) - \sqrt{9x^2 - 2x + 5} = \dots\dots$$

$$A. 0$$

$$B. -\frac{1}{3}$$

$$C. -1$$

$$D. -\frac{4}{3}$$

$$E. -\frac{5}{3}$$

Kunci : E

Penyelesaian :

Ingat rumus :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{ax^2 + dx + e} \right) = \frac{b-d}{2\sqrt{a}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ (3x-2) - \sqrt{9x^2 - 2x + 5} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{(3x-2)^2} - \sqrt{9x^2 - 2x + 5} \right) \\ &= \frac{-12 - (-2)}{2\sqrt{9}} \\ &= -\frac{10}{6} \\ &= -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

4. Diketahui fungsi $f(x) = \frac{2+\cos x}{\sin x}$. Garis singgung grafiknya $x = \frac{\pi}{2}$ memotong sumbu Y di titik (0, b), b adalah

- A. 2
B. $\frac{\pi}{2}$
C. $-2 + \frac{\pi}{2}$
D. $2 - \frac{\pi}{2}$
E. $2 + \frac{\pi}{2}$

Kunci : E

Penyelesaian :

$$f(x) = \frac{2+\cos x}{\sin x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(-\sin x)(\sin x) - (2+\cos x)\cos x}{(\sin x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x - 2\cos x}{(\sin x)^2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \Rightarrow 2 \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$$

$$\text{Persamaan garis singgung : } y - 2 = -1\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y = -x + \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)$$

Titik potong dengan sumbu Y, syaratnya $x = 0$

$$y = (-0) + \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y = 2 + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Jadi nilai } b = 2 + \frac{\pi}{2}$$

5. Diketahui $f(x) = 2^{5-x} + 2^x - 12$. Jika $f(x_1) = 0$, maka $x_1 \cdot x_2 = \dots$

- A . 6
B . 5
C . 4

- D . -5
E . -6

Kunci : A

Penyelesaian :

$$f(x) = 2^{5-x} + 2^x - 12$$

$$\circ f(x_1) = 0 \rightarrow 2^{5-x_1} + 2^{x_1} - 12 = 0$$

$$2^5 \cdot 2^{-x_1} + 2^{x_1} - 12 = 0$$

$$\text{Misalkan : } 2^{x_1} = a \rightarrow 2^{-x_1} = \frac{1}{a}, \text{ sehingga}$$

$$32 \cdot \frac{1}{a} + a - 12 = 0$$

$$a^2 - 12a + 32 = 0$$

$$(a-4)(a-8) = 0$$

$$a = 4 \rightarrow 2^{x_1} = 4 \rightarrow x_1 = 2 \text{ atau}$$

$$a = 8 \rightarrow 2^{x_1} = 8 \rightarrow x_1 = 3$$

$$\circ \circ f(x_2) = 0 \rightarrow 2^{5-x_2} + 2^{x_2} - 12 = 0$$

Dengan memakai perhitungan yang sama seperti di atas didapat $x_2 = 2$ atau $x_2 = 3$

Nilai x_1, x_2 yang memungkinkan adalah 4, 6, atau 9

Catatan :

Jika dalam soal ini ada keterangan tambahan bahwa $x_1 = x_2$ maka jawabannya adalah (A)

- 6 . Garis g melalui A (2, 4, -2) dan B (4, 1, -1), sedangkan garis h melalui C (7, 0, 2) dan D (8, 2, -1). Besar sudut antara g dan h adalah

- A . 0°
B . 30°
C . 45°

- D . 60°
E . 90°

Kunci : D

Penyelesaian :

$$\text{Garis g sejajar dengan vektor : } \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -1 \\ -2 & -(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Garis h sejajar dengan vektor : } \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 2 & -0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Misalkan sudut antara vektor $\overrightarrow{BA}$ dan $\overrightarrow{CD}$ adalah α , maka :

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{CD}| \sin \alpha = (-2)(1) + (3)(2) + (-1)(-3)$$

$$\sqrt{14} \cdot \sqrt{14} \cos \alpha = 7$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

Jadi sudut antara garis h dan g = 60°

7. x_1 dan x_2 ada akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - (2k + 4)x + (3k + 4) = 0$. Kedua akar itu bilangan bulat, dan k konstan. Jika x_1, k, x_2 merupakan tiga suku pertama deret geometri, maka suku ke- n deret tersebut adalah

- A . -1
B . $2(-1)^n$
C . $-(-1)^n$
D . $1 + (-1)^n$
E . $1 - (-1)^n$

Kunci : D

Penyelesaian :

$$x^2 - (2k + 4)x + (3k + 4) = 0$$

x_1, k, x_2 merupakan tiga suku pertama deret geometri, maka :

$$\frac{k}{x_1} = \frac{x_2}{k}$$

$$x_1 \cdot x_2 = k^2$$

$$3k + 4 = k^2$$

$$k^2 - 3k - 4 = 0$$

$$(k - 4)(k + 1) = 0$$

$$k = 4 \text{ atau } k = -1$$

Dari keterangan bahwa x_1 dan x_2 bilangan bulat, maka diperlukan syarat diskriminannya harus berbentuk kuadrat murni.

$$D = (2k + 4)^2 - 4(3k + 4)$$

$$D = 4k^2 + 16k + 16 - 12k - 16$$

$$D = 4k^2 + 4k$$

Untuk $k = 4$; $D = 4(4)^2 + 4(4) = 80$ (bukan kuadrat murni),

$k = 4$ tidak memenuhi.

Untuk $k = -1$; $D = 4(-1)^2 + 4(-1) = 0$ (kuadrat murni),

$k = -1$ memenuhi.

Persamaan kuadratnya untuk $k = -1$;

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$x_1 = 1 ; x_2 = 1$$

Bentuk deret geometrinya : 1, -1, 1; $a = 1, r = -1$

Suku ke- n : $U_n = ar^{n-1}$

$$U_n = 1(-1)^{n-1}$$

$$U_n = -1(-1)^n$$

8. Diketahui $f(x) = 3 \cos x + 4 \sin x + c$, c suatu konstan. Jika nilai maksimum $f(x)$ adalah 1, maka nilai minimumnya

- A . 0
B . -1
C . -5
D . -9
E . -25

Kunci : D

Penyelesaian :

$$f(x) = 3 \cos x + 4 \sin x + c$$

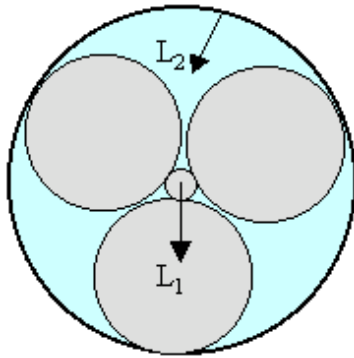
$$f(x)_{\text{maksimum}} = \sqrt{3^2 + 4^2} + c = 5 + c$$

$$f(x)_{\text{maksimum}} = -\sqrt{3^2 + 4^2} + c = -5 + c$$

$$\text{karena } f(x)_{\text{maks}} = 1, \text{ maka } 5 + c = 1 \Rightarrow c = -4$$

$$\text{Jadi } f(x)_{\text{min}} = -5 - 4 = -9$$

9.



Tiga buah lingkaran yang berjari-jari sama saling bersinggungan luar. Lingkaran kecil L_1 menyinggung ketiga lingkaran tersebut dan lingkaran besar L_2 juga menyinggung ketiga lingkaran itu seperti pada gambar. Perbandingan jari-jari lingkaran L_2 dan jari-jari lingkaran L_1 adalah

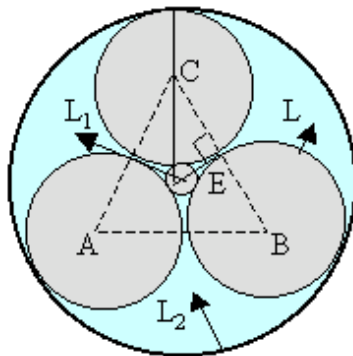
A . $(1 + \sqrt{3}) : (1 - \sqrt{3})$

B . $14 : 1$

C . $(7 + 4\sqrt{3}) : 1$

Kunci : C

Penyelesaian :



Misalkan jari-jari lingkaran L_1 , L , L_2 adalah r_1 , R , dan r_2

$$\sin \angle DCE = \frac{DE}{CD}$$

$$\Leftrightarrow \sin 30^\circ = \frac{DE}{r_1 + R}$$

$$DE = \frac{1}{2}(r_1 + R)$$

Teorema Pythagoras pada $\triangle DCE$

$$CD^2 = DE^2 + CE^2$$

$$\Leftrightarrow (r_1 + R)^2 = \left(\frac{1}{2}(r_1 + R)\right)^2 + R^2$$

$$\Leftrightarrow r_1^2 + r_1 R + R^2 = \frac{1}{4}(r_1^2 + r_1 R + R^2) + R^2 \quad \text{ambil } r_1 \text{ yang positif}$$

$$\Leftrightarrow 4r_1^2 + 8Rr_1 = r_1^2 + r_1 R + R^2$$

$$\Leftrightarrow 3r_1^2 + 6Rr_1 - R^2 = 0$$

Dari gambar diperoleh :

$$r_2 = r_1 + 2R$$

$$r_2 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1\right)R + 2R$$

$$r_2 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{3} + 1\right)R$$

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} + 1\right)R}{\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1\right)R} = \frac{\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} + 1\right)}{\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1\right)}$$

Nilai r_1 dicari dengan rumus

persamaan kuadrat :

$$r_1 = \frac{-6R \pm \sqrt{(6R)^2 - 4(3)(-R^2)}}{2 \cdot 3}$$

$$r_1 = \frac{-6R + \sqrt{48R^2}}{6}$$

$$r_1 = \frac{-6R + 4R\sqrt{3}}{6}$$

$$r_1 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1\right)R$$

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} + 1\right)\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} + 1\right)}{\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1\right)\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{3} + 1\right)}{\left(\frac{4}{3} - 1\right)} = \frac{\frac{7}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{3}}{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{7 + 4\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \text{jadi } r_2 : r_1 = (7 + 4\sqrt{3}) : 1$$

10 . Diketahui bidang empat T.ABC. $TA = TB = 5$, $TC = 2$, $CA = CB = 4$, $AB = 6$.

Jika α sudut antara TC dan bidang TAB, maka $\cos \alpha$ adalah

A . $\frac{15}{16}$

D . $\frac{9}{16}$

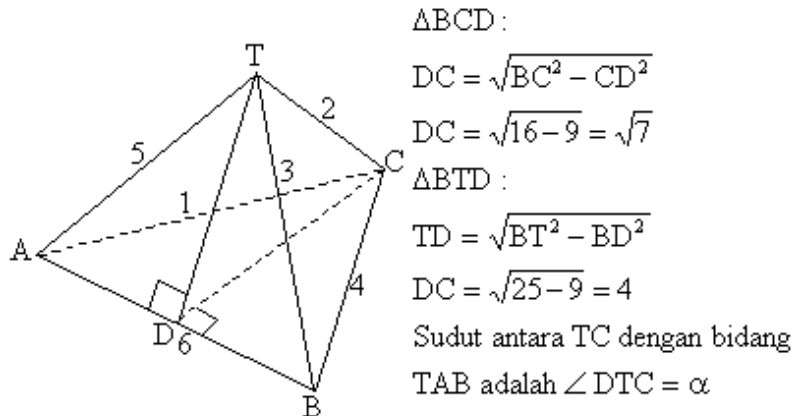
B . $\frac{13}{16}$

E . $\frac{7}{16}$

C . $\frac{9}{16}$

Kunci : B

Penyelesaian :



Dalil kosinus pada $\triangle DCT :$

$$DC^2 = TD^2 + TC^2 - 2 \cdot TD \cdot TC \cdot \cos \alpha$$

$$(\sqrt{7})^2 = (4)^2 + (2)^2 - 2 \cdot (4) \cdot (2) \cdot \cos \alpha$$

$$7 = 20 - 16 \cos \alpha$$

$$16 \cos \alpha = 13$$

$$\cos \alpha = \frac{13}{16}$$