

1. Jika titik $P\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 1\right)$, $Q(1, 0, 0)$ dan $R(2, 5, a)$ terletak pada satu garis lurus ,
maka $a = \dots\dots$

- A . 0
B . $\frac{1}{2}$
C . 1
D . 2
E . $\frac{5}{2}$

Kunci : D

Penyelesaian :

Jika titik $P\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 1\right)$, $Q(1, 0, 0)$, $R(2, 5, a)$ terletak pada satu garis maka

$\overrightarrow{PQ}$ dan $\overrightarrow{QR}$ harus membentuk sudut 0° atau 180°

$$\text{maka } \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 - 3/2 \\ 0 - 5/2 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -5/2 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ 5 - 0 \\ a - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ a \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{QR}| \cos \alpha = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QR}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{25}{4} + 1} \cdot \sqrt{1 + 25 + a^2} \cos 180^\circ = -\frac{1}{2}(2) + 5\left(-\frac{5}{2}\right) + a(-1)$$

$$\sqrt{\frac{30}{4}} \cdot \sqrt{26 + a^2} (-1) = -1 - \frac{25}{2} - a$$

$$(-1) \sqrt{\frac{30}{4}} (26 + a^2) = -\frac{26}{2} - a$$

$$(-1) \sqrt{\frac{30}{4}} (26 + a^2) = -(a + 13)$$

kedua ruas dikuadratkan :

$$780 + 30a^2 = 4(a^2 + 26a + 169)$$

$$780 + 30a^2 = 4a^2 + 104a + 676$$

$$780 + 30a^2 - 4a^2 - 104a - 676 = 0$$

$$\underline{26a^2 - 104a + 104 = 0} \times \frac{1}{2}$$

$$13a^2 - 52a + 52 = 0$$

$$(13a - 26)(a - 2) = 0 \Rightarrow a = 2$$

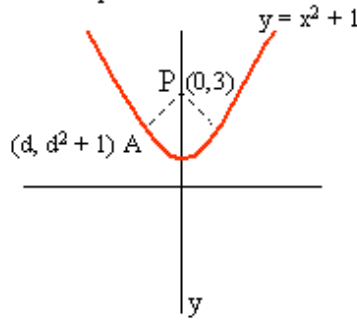
2. Nilai minimum dari kuadrat jarak titik $P(0, 3)$ ke titik Q yang terletak pada parabola $y = x^2 + 1$ adalah

- A . $\frac{17}{8}$
B . $\frac{7}{4}$
C . $\frac{3}{2}$
D . $\frac{5}{4}$
E . $\frac{9}{8}$

Kunci : B

Penyelesaian :

Sketsa parabola



Bila memperhatikan gambar di samping

didapat $P(0,3)$. $A(d, d^2 + 1)$

maka jarak P ke A adalah :

$$PA = \sqrt{(d-0)^2 + (d^2+1-3)^2}$$

$$= \sqrt{d^2 + (d^2-2)^2}$$

$$= \sqrt{d^2 + d^4 - 4d^2 + 4}$$

$$PA^2 = d^4 - 3d^2 + 4$$

Jadi yang ditanyakan nilai minimum kuadrat jarak P ke A adalah :

$$PA^2 = d^4 - 3d^2 + 4$$

$$(PA^2)' = 4d^3 - 6d = 0 \quad d(4d^2 - 6) = 0$$

$$d = 0 \text{ atau } d^2 = \frac{6}{4} \Leftrightarrow d = \pm \sqrt{\frac{6}{4}}$$

Uji jenis titik ekstrem $(PA^2)'' = 12d^2 - 6$

$$\text{Untuk } d = +\sqrt{\frac{6}{4}} \quad (PA^2)'' = 12\left(\sqrt{\frac{6}{4}}\right)^2 - 6 = 18 - 6 = 12 > 0$$

untuk nilai $d = \sqrt{\frac{6}{4}}$ memberikan nilai minimum (PA^2) , dan nilai

$$PA^2 = d^4 - 3d^2 + 2$$

$$= \left(\sqrt{\frac{6}{4}}\right)^4 - 3\left(\sqrt{\frac{6}{4}}\right)^2 + 2 = \frac{36}{16} - \frac{18}{4} + 2 = \frac{7}{4}$$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{(3-\sqrt{x^2+5})} = \dots\dots\dots$

A. $-\frac{3}{2}$

D. $\frac{3}{2}$

B. 0

E. 3

C. $\frac{2}{3}$

Kunci : A

Penyelesaian :

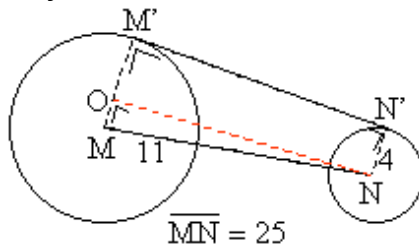
$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{3-\sqrt{x^2+5}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{3-\sqrt{x^2+5}} \times \frac{3+\sqrt{x^2+5}}{3+\sqrt{x^2+5}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3+\sqrt{x^2+5})}{9-x^2+4} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3+\sqrt{x^2+5})}{-x^2+4} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3+\sqrt{x^2+5})}{-(x-2)(x+2)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+\sqrt{x^2+5}}{-(x+2)} \\
&= \frac{3+\sqrt{2^2+5}}{-(2+2)} = -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

4. M adalah pusat sebuah lingkaran yang berjari-jari 11 cm dan N adalah pusat lingkaran yang berjari-jari 4 cm. Jarak M dan N 25 cm. Panjang garis singgung persekutuan luar kedua lingkaran itu sama dengan

- A . 17 cm
B . 18 cm
C . 20 cm
D . 21 cm
E . 24 cm

Kunci : E

Penyelesaian :



Maka yang ditanyakan $\overline{M'N'}$?

Perhatikan !

Dibuat garis sejajar $N'M'$ melalui N maka didapat garisnya NO. Dengan demikian $NO = M'N'$ dan $MO = MN - OM'$

$$MO = M'M - OM' = 11 - 4 = ?$$

$$\text{pada } \triangle MON \text{ didapat } MN^2 = MO^2 + ON^2$$

$$\sqrt{25^2 - 7^2} = ON$$

$$\sqrt{625 - 49} = ON = \sqrt{576} = 24$$

5. Perhatikan deret :

$$1 + \log \cos x + \log^2 \cos x + \log^3 \cos x + \dots$$

Jumlah deret ini, yaitu S, dapat mengambil setiap nilai.

$$A. \frac{1}{2} < S < 1$$

$$D. S > \frac{1}{2}$$

$$B. \frac{1}{2} < S < 2$$

$$E. S > 1$$

$$C. S < \frac{1}{2}$$

Kunci : B

Penyelesaian :

$$H + \log \cos x + \log^2 \cos x + \log^3 \cos x + \dots$$

Jika jumlah deret di atas adalah S, tentukan batas S itu maksudnya.

Deret di atas adalah deret geometri dengan $r = \log \cos x$

$$\text{Bukti : } \frac{U_3}{U_2} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\log^3 \cos x}{\log^2 \cos x} = \frac{\log^2 \cos x}{\log \cos x} = r$$

agar deret di atas memiliki nilai maka $H < 1$ (1)

berarti $-1 < \log \cos x < 1$, selanjutnya perlu dilihat, bahwa $\cos x$ harganya berkisar $-1 \leq \cos x \leq 1$ dan untuk harga logaritma ada nilainya bila lebih dari 0 ($\log x$ ada nilai jika $x > 0$) maka didapat irisan syarat harga cosinus dan logaritma adalah $0 < \cos x \leq 1$, sehingga memberikan batasan pada nilai rasio : $-1 < r < 0$.

$$\text{Deret geometri yang konvergen } S \sim \frac{a}{1-r}$$

$$r \text{ minimum} = -1 \rightarrow S \sim \frac{a}{1-(-1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$r \text{ maksimum} = 0 \rightarrow S \sim \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-0} = 1$$

$$\text{maka } S \text{ yang mungkin } \frac{1}{2} < S < 1$$

6. Panjang setiap rusuk bidang empat beraturan T.ABC sama dengan 16 cm. Jika P pertengahan AT dan Q pertengahan BC, maka PQ sama dengan

$$A. 8\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$D. 12\sqrt{2} \text{ cm}$$

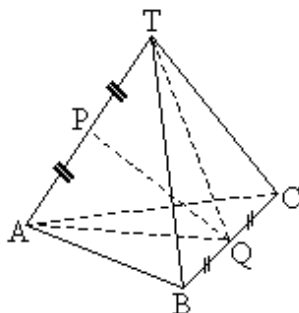
$$B. 8\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$E. 12\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$C. 8\sqrt{6} \text{ cm}$$

Kunci : A

Penyelesaian :



maka $PQ = ?$

$$PQ = \sqrt{QT^2 - TP^2}$$

$$QT = \sqrt{RC^2 - QC^2}$$

$$= \sqrt{16^2 - 8^2} = \sqrt{256 - 64}$$

$$= \sqrt{192}$$

$$QT = AQ = \sqrt{192}$$

$$\text{maka } PQ = \sqrt{(\sqrt{192})^2 - 8^2}$$

$$TA = TB = TC = AB = BC = CA = 16 \quad = \sqrt{192 - 64} = \sqrt{128}$$

$$= 8\sqrt{2}$$

7. Sebuah benda ditembakkan tegak lurus ke atas. Ketinggian yang dicapai pada waktu t detik, dinyatakan dalam meter, diberikan sebagai $h(t) = 30t - t^2$. Lama benda itu berada pada ketinggian yang tidak kurang dari 221 meter adalah

- A . lebih dari 17 detik
- B . lebih dari 13 detik dan kurang dari 17 detik
- C . lebih dari 10 detik dan kurang dari 13 detik
- D . 7 detik
- E . 4 detik

Kunci : E

Penyelesaian :

Ketinggian yang dicapai yang dilempar ke atas bila diamati terhadap perubahan waktu sesuai dengan persamaan.

$$h(t) = 30t - t^2$$

yang ditanyakan sana benda saat ketinggian tidak kurang dari 221 meter.

$$h(t) \geq 221$$

$$30t - t^2 \geq 221$$

$$-t^2 + 30t - 221 \geq 0 \quad x-1$$

$$t^2 - 30t + 221 \leq 0$$

$$(t - 17)(t - 13) \leq 0$$

$$+ 0 - 0 + H(t)$$

$$13 \quad 17$$

Di atas dapat diketahui bahwa dari detik ke-13 sampai dengan 17 benda berada di atas 221 m. Sehingga lamanya benda di atas 221 m adalah $(17 - 13) = 4$ detik.

8. Nilai maksimum dari : $f(x) = 2 \cos 2x + 4 \sin x$

Untuk $0 < x < \pi$, adalah

- A . 2
- B . 3
- C . 4
- D . -6
- E . -12

Kunci : B

Penyelesaian :

$$f(x) = 2 \cos 2x + 4 \sin x$$

untuk $0 < x < \pi$ tentukan nilai maksimum ?

Untuk mencari nilai maksimum atau minimum gunakan $f'(x)$ dan $f''(x)$

$$f'(x) = -4 \sin 2x + 4 \cos x = 0 \text{ ingat, } \sin 2x = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x$$

$$f'(x) = -4 (2 \sin x \cos x) \cos x = 0$$

$$= -8 \sin x \cos x + 4 \cos x = 0$$

$$4 \cos x (-2 \sin x + 1) = 0$$

$$4 \cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$-2 \sin x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}$$

$$f''(x) = -8 \cos 2x - 4 \sin x = 0$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -8 \cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 4 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8 - 4 = 4 > 0$$

$$(x = \frac{1}{2}\pi \text{ nilai minimum})$$

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -8 \cos 2\left(\frac{\pi}{6}\right) - 4 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -8 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 4 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$(x = \frac{1}{6}\pi \text{ nilai maksimum})$$

$$f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -8 \cos 2\left(\frac{5\pi}{6}\right) - 4 \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\ = 8 \cos 300^\circ - 4 \sin 150^\circ = -4 - 4 = -8 < 0$$

$$(x = \frac{5\pi}{6} \text{ nilai maksimum})$$

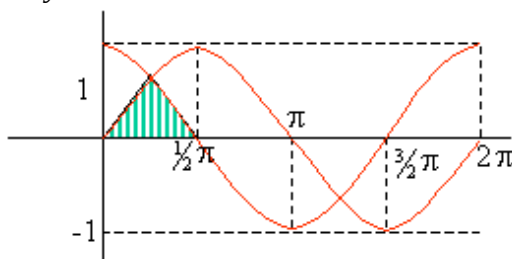
$$\text{maka } \frac{\pi}{6} = 30^\circ, \frac{5\pi}{6} = 150^\circ$$

9. Tiga buah bilangan merupakan barisan geometri dengan perbandingan lebih besar satu. Bila suku terakhir dikurangi 3, maka ketiga bilangan itu merupakan barisan aritmatika dengan jumlah 54. Selisih suku ketiga dan suku pertama deret aritmatika ini adalah

- A . 16
B . 14
C . 12
D . 10
E . 8

Kunci : E

Penyelesaian :



Hitung luas daerah yang dibatasi $y = \sin x$, $y = \cos x$ dan sumbu x .

Untuk batas x , $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Titik potong lintasan $y = \sin x$ dan $y = \cos x$ pada $x = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$

$$\text{Luas} = \int_0^{\pi/4} \sin x \, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x \, dx$$

10. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sin x$, $y = \cos x$ dan sumbu x untuk

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ adalah

A . $\int_0^{\pi/2} (\sin x - \cos x) dx$

B . $\int_0^{\pi/2} (\cos x - \sin x) dx$

C . $\int_0^{\pi/2} \sin x dx - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x dx$

D . $\int_0^{\pi/4} \cos x dx - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin x dx$

E . $\int_0^{\pi/4} \sin x dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x dx$

Kunci : C

Penyelesaian :

Tiga bilangan yang membentuk barisan geometri dengan $r > 1$

Hal ini kita misalkan : (1) a, ar, ar²

(2) a, ar, ar² - 3

(barisan aritmatika dengan $S_3 = S_4$)

Ditanya $U_3 - U_1$?

Perhatikan data (2) a, ar, ar² - 3 ($S_3 = 54$), maka $a + ar + ar^2 - 3 = 54$

$$\Leftrightarrow a + ar + ar^2 = 57 \text{ (3)}$$

a, ar, ar² - 3 (membentuk barisan Aritmatik)

$$ar - a = (ar^2 - 3) - ar \text{ (b = sama)}$$

$$\Leftrightarrow 2ar - a - ar^2 = -3 \text{ (4)}$$

(3) dan (4) dieliminasi untuk mencari nilai salah satu variabel

$$(3) ar + a + ar^2 = 57$$

$$(4) 2ar - a - ar^2 = -3$$

$$3ar = 54 \longrightarrow a = \frac{18}{r}$$

$$(3) a(1+r+r^2) = 57$$

$$\frac{18}{r}(1+r+r^2) = 57$$

$$\Leftrightarrow 18 + 18r + 18r^2 = 57r$$

$$18r^2 - 39r + 18 = 0$$

$$(3r - 2)(6r - 9) = 0 \longrightarrow r = \frac{2}{3}; r = \frac{3}{2}$$

ingat syarat di atas $r > 1$ maka $r = \frac{3}{2}$

$$r = \frac{3}{2} \text{ maka } a = \frac{18}{r} = \frac{18}{3/2} = 12$$

$$U_3 = ar^2 - 3 = 12\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3$$

$$= 12 \cdot \frac{9}{4} - 3 = 24$$

$$\text{maka } U_3 - U_1 = 24 - 12 = 12$$